Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 3 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln auch für die ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Sekundarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklassen **11 – 12**

58. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

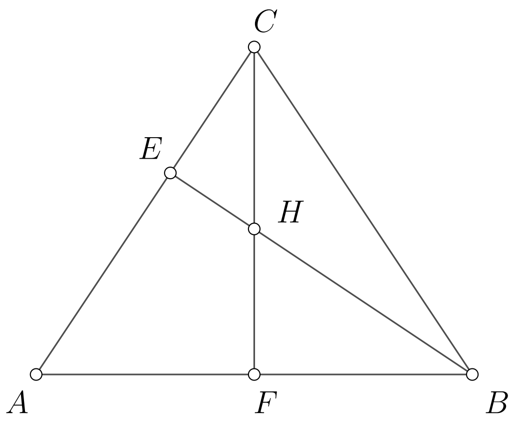
581211

Man bestimme die kleinstmögliche Quersumme einer durch 37 teilbaren positiven ganzen Zahl.

581212

Ein Dreieck ABC sei spitzwinklig und gleichschenklig mit $|BC| = |CA|$. Die Fußpunkte der Höhen von B und C auf die jeweils gegenüberliegenden Dreiecksseiten $\overline{CA}$ und $\overline{AB}$ werden mit E beziehungsweise F bezeichnet. Der Schnittpunkt der Höhen $\overline{CF}$ und $\overline{BE}$ sei H, vgl. Abbildung A 581212.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks $HEAF$, wenn die Längen $|CE| = 5$ und $|EA| = 8$ bekannt sind?



A 581212

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

581213

Auf einem Schachbrett mit 8×8 Feldern bedroht ein Turm alle Schachfiguren, die in der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte stehen wie er selbst, unabhängig davon, ob ein weiterer Turm dazwischen steht oder nicht.

Wie viele Türme können auf dem Schachbrett maximal so platziert werden, dass jeder Turm höchstens zwei weitere Türme bedroht?

581214

Gesucht sind alle Paare (x, y) reeller Zahlen, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$x^2 + ay = a\,, \tag{1}$$
$$x + a^2y^2 = a\,. \tag{2}$$

a) Für $a = 1$ bestimme man alle Lösungspaare (x, y).

b) Man bestimme für jede beliebige reelle Zahl a die Anzahl der verschiedenen Lösungspaare und gebe diese an.